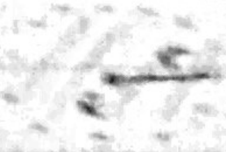
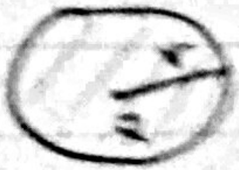
23/10/18

$\boxed{\bar{x}\in\mathbb{R}^n, r>0}$

$B(\bar{x},r):=\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\|<r\}$: ανοικτή μπάλα κέντρου $\bar{x}$ και ακτίνας $r>0$



$\bar{B}(\bar{x},r)=\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\|\le r\}$: κλειστή μπάλα κέντρου $\bar{x}$ και ακτίνας r



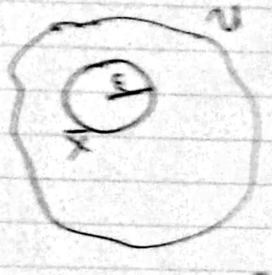
$\partial B(\bar{x},r):=\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\|=r\}$: σφαίρα ($\neq$ μπάλα) κέντρου $\bar{x}$ και ακτίνας r

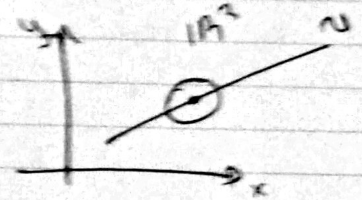
$\Rightarrow B(\bar{x},r)\cup\partial B(\bar{x},r)=\bar{B}(\bar{x},r)$ με $B(\bar{x},r)\cap\partial B(\bar{x},r)=\emptyset$

$\bar{y} \in B(\bar{x}, r) \Leftrightarrow \|\bar{x} - \bar{y}\| < r$

Ορισμός: Το $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται ανοικτό $\Leftrightarrow \forall\, \bar{x} \in U\ \exists\, \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$

κλειστό $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus U$ ανοικτό





U: δεν είναι ανοικτό

Παρατήρηση ① Το κενό σύνολο $\emptyset \subset \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό [αφού δεν έχει στοιχεία και συνεπώς ότι και να ισχυριστώ για τα στοιχεία του ισχύει]
$\Rightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset$ κλειστό

② Από την άλλη το $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό [αφού για κάθε $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε:
$B(\bar{x}, r) \subset \mathbb{R}^n$]
$\Rightarrow \emptyset = \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n$ είναι κλειστό
$\Rightarrow$ Το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}^n$ είναι και ανοικτά και κλειστά [δεν υπάρχουν άλλα $U \subset \mathbb{R}^n$ που να είναι και ανοικτά και κλειστά]

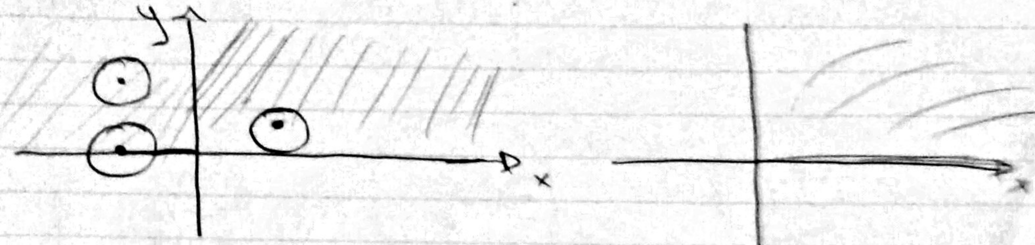
Παρατήρηση ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ: $U \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ ή U ανοικτό ή U κλειστό

Υπάρχουν $U \subset \mathbb{R}^n$ που δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά [ανάλογα με τον $\mathbb{R} = \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$ με $n=1$: $\boxed{\Pi\chi}$ $[0,1)$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό]

$\rightarrow$

(π.χ) Στον $\mathbb{R}^2$: $V = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y\geq 0\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y>0\}$

Δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό



V δεν είναι ανοιχτό, αφού π.χ. για ένα σημείο $(x,0)$ με $x<0$ και οποιοδήποτε $\varepsilon>0$ η $B((x,0),\varepsilon) \not\subseteq V$ [$\not\subseteq$: δεν περιέχεται]

Αυτό ισχύει αφού το σημείο $\left(x, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \in B((x,0),\varepsilon)$

αλλά $\notin V$

Πράγματι, αφού $x<0$ και $y = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$

[άρα $\left(x, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \notin V$] και:

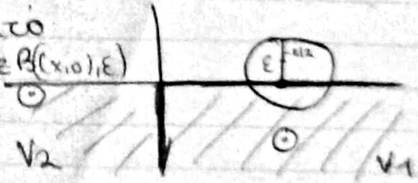
$$\left\| \left(x, -\frac{\varepsilon}{2}\right) - (x,0) \right\| = \left\| \left(0, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Άρα $\left(x, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \in B((x,0),\varepsilon)$

Το V όμως δεν είναι ούτε κλειστό αφού το
$V = \mathbb{R}^n \setminus V = \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0,\ y\leq 0\}}_{V_1} \cup \underbrace{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0,\ y<0\}}_{V_2}$

δεν είναι ανοιχτό

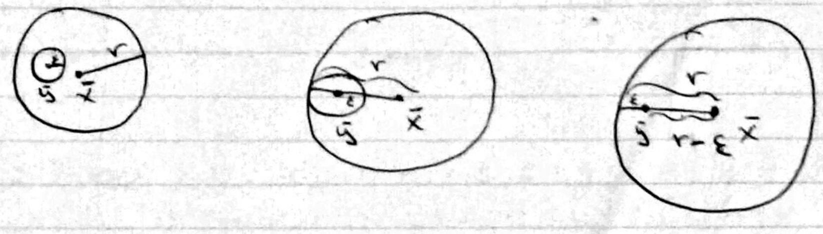
[αφού για $x\geq 0$ το $(x, \varepsilon/2) \in B((x,0),\varepsilon)$
αλλά $\notin V$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow B((x,0),\varepsilon) \not\subseteq V$]



Πρόταση: Η ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και η κλειστή μπάλα >> κλειστό -||- του $\mathbb{R}^n$

Απόδειξη: Θ.νδο $B(\bar{x},r) := \{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| < r\}$ είναι ανοικτό δηλ. Θ.νδο $\forall \underbrace{\bar{y}\in B(\bar{x},r)}_{\Leftrightarrow \|\bar{y}-\bar{x}\|<r} \exists\, \varepsilon>0 : B(\bar{y},\varepsilon)\subset B(\bar{x},r)$

$\boxed{n=2}$



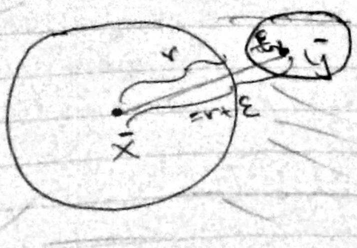
Αφού: $\|\bar{y}-\bar{x}\|<r \Rightarrow \|\bar{y}-\bar{x}\| = r-\varepsilon$, τότε Θνδο
$\forall \underbrace{\bar z \in B(\bar y,\varepsilon)}_{\Leftrightarrow \|\bar z-\bar y\|<\varepsilon}$ ισχύει: $\underbrace{\bar z\in B(\bar x,r)}_{\Leftrightarrow \|\bar z-\bar x\|<r}$

Άρα: Θνδο: $\|\bar z-\bar y\|<\varepsilon \Rightarrow \|\bar z-\bar x\|<r$
[και ξέρω ότι: $\|\bar y-\bar x\| = r-\varepsilon$]

$\|\bar z-\bar x\| = \|(\bar z-\bar y)+(\bar y-\bar x)\| \le \underbrace{\|\bar z-\bar y\|}_{<\varepsilon} + \underbrace{\|\bar y-\bar x\|}_{<r-\varepsilon} < r$ ■

$\boxed{\text{Τριγωνική Ανισότητα}}$

Αντίστοιχα, Θνδο: $\bar B(\bar x,r) := \{\bar y\in\mathbb{R}^n : \|\bar x-\bar y\|\le r\}$ είναι κλειστό δηλ. Θ.νδο $\mathbb{R}^n\setminus\bar B(\bar x,r)$: ανοικτό
δηλ. Θνδο $\forall \bar y\in\mathbb{R}^n = \{\bar y\in\mathbb{R}^n , \|\bar x-\bar y\|>r\}$



με $\|\bar x-\bar y\|>r$ ότι $\exists\, \varepsilon>0$
$B(\bar y,\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n\setminus\bar B(\bar x,r)$

$\forall \bar z$ με $\boxed{\|\bar z-\bar y\|<\varepsilon}$ $\boxed{\|\bar z-\bar x\|>r}$

$\Rightarrow$

$\|\bar{x}-\bar{y}\| > r \Leftrightarrow \boxed{\|\bar{x}-\bar{y}\| = r+\varepsilon}$ με $\varepsilon > 0$

$\|\bar{z}-\bar{x}\| \geq \|\bar{y}-\bar{x}\| - \|\bar{z}-\bar{y}\|$

[ισχύει αφού: $\Leftrightarrow \|\bar{z}-\bar{x}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\| \geq \|\bar{y}-\bar{x}\| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \|\bar{y}-\bar{x}\| \leq \|\bar{z}-\bar{x}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\|$

$= (\bar{y}-\bar{z})+(\bar{z}-\bar{x})$]

$\Rightarrow \|\bar{z}-\bar{x}\| \geq \underbrace{\|\bar{y}-\bar{x}\|}_{=r+\varepsilon} - \underbrace{\|\bar{z}-\bar{y}\|}_{-\varepsilon} > r+\varepsilon-\varepsilon = r$ ☒

Πρόταση: Η ένωση μιας (οσοδήποτε «μεγάλης», ακόμα και υπεραριθμήσιμης) οικογένειας ανοικτών υποσυνόλων είναι ανοικτή και η τομή πεπερασμένου πλήθους ανοικτών υποσυνόλων είναι ανοικτή

Απόδειξη: Έστω U_i, $i \in I$, I σύνολο δεικτών, ανοικτά.

Θνδο: $\bigcup_{i\in I} U_i$ ανοικτό δηλ. θνδο $\forall \bar{x} \in \bigcup_{i\in I} U_i$:

$\exists\ \varepsilon > 0 : B(\bar{x},\varepsilon) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$

Έστω $\bar{x} \in \bigcup_{i\in I} U_i \Rightarrow \exists\, i_0 \in I : \bar{x} \in U_{i_0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0 : B(\bar{x},\varepsilon) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} U_{i}$ ☒

Έστω τώρα U_i, $i = 1,\dots,k$ ($k \in \mathbb{N}$) με U_i ανοικτά και $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} U_i$. Τότε $\bar{x} \in U_i$, $\forall i = 1,\dots,k \Rightarrow \forall i = 1,\dots,k$:

$\exists\ \varepsilon_i > 0 : B(\bar{x},\varepsilon_i) \subset U_i$

Έστω $\varepsilon = \min\{\varepsilon_i > 0 : i = 1,\dots,k\}$ Τότε: $B(\bar{x},\varepsilon) \subset B(\bar{x},\varepsilon_i) \subset U_i$

$\Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon) \subset B(\bar{x},\varepsilon_i) \subset U_i\ \forall\ i = 1,\dots,k \Rightarrow B(\bar{x},\varepsilon) \subset \bigcap_{i=1}^{k} U_i$ ☒

Παρατήρηση ("γελοία" αλλά χρήσιμη):

Αν $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, τότε $B(\bar{x}, \varepsilon_1) \subset B(\bar{x}, \varepsilon_2)$

Θνδο: $\underbrace{\bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon_1)}_{\Leftrightarrow \|\bar{x}-\bar{y}\| < \varepsilon_1} \Rightarrow \underbrace{\bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon_2)}_{\Leftrightarrow \|\bar{x}-\bar{y}\| < \varepsilon_2}$

Παρατήρηση: Εάν πάρουμε ένα άπειρο αριθμήσιμο πλήθος ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$, τότε μπορεί η τομή τους να μην είναι ανοικτή?

Αντιπαράδειγμα: Αν έπαιρνα το $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(0, \frac{1}{k}\right)$, $k \in \mathbb{N}$

αλλά είναι ίσο με το $\emptyset$ και δε μας βοηθάει.
Μια καλή ιδέα είναι το $\bigcap_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \{0\}$.

Πώς μπορώ να το τροποποιήσω στον $\mathbb{R}^n$? ①
Η γενίκευση στον $\mathbb{R}^n$ είναι $\bigcap_{k=1}^{\infty} \underbrace{B\left(\bar{x}, \frac{1}{k}\right)}_{\text{ανοικτό}} = \{\bar{x}\}$

όπου το μονοσύνολο $U = \{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ δεν είναι ανοικτό αφού για κανένα $\varepsilon > 0$ δεν ισχύει
$B(\bar{x}, \varepsilon) \subset \{\bar{x}\}$
δηλ. $\forall \varepsilon > 0$: $B(\bar{x}, \varepsilon) \not\subset \{\bar{x}\}$ ανοικτή
δηλ. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \bar{y} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$: $\bar{y} \neq \bar{x}$
δηλ. $\forall \varepsilon > 0$: $\exists \bar{y} \in \mathbb{R}^n$: $\|\bar{x}-\bar{y}\| < \varepsilon$, $\bar{y} \neq \bar{x}$, αυτό ισχύει αφού (π.χ.) για $\|\bar{x}-\bar{y}\| = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ έχουμε

$\|\bar{x}-\bar{y}\| < \varepsilon$ αλλά $\bar{x} \overset{*}{\neq} \bar{y}$

(*) $\|\bar{x}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$ δηλ. $\|\bar{x}-\bar{y}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{y}$

• Πώς βγαίνει το ① ?

Απάντηση: $\bar{x} \in B\left(\bar{x}, \frac{1}{k}\right) \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(\bar{x}, \frac{1}{k}\right)$

Από την άλλη έστω $\bar{y} \neq \bar{x}$ τότε $\|\bar{y} - \bar{x}\| > 0$, ας πούμε $\|\bar{y} - \bar{x}\| = \varepsilon > 0$ και τότε (Αρχιμήδεια Ιδιότητα) $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε: $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$ αλλά τότε:

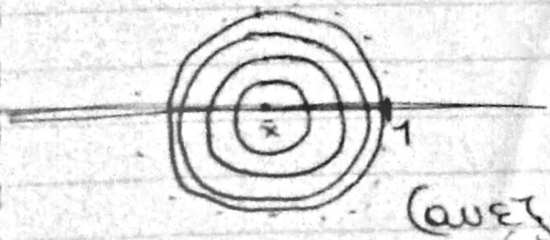
$$\|\bar{y} - \bar{x}\| = \varepsilon > \frac{1}{k_0} \Rightarrow \bar{y} \notin B\left(\bar{x}, \frac{1}{k_0}\right) \Rightarrow \bar{y} \notin \bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(\bar{x}, \frac{1}{k}\right)$$

ΑΣΚΗΣΗ: Πρόταση: Η τομή μιας οικογένειας κλειστών συνόλων και η ένωση πεπερασμένου πλήθους, κλειστών είναι κλειστά

[Απόδειξη: Από την προηγούμενη ΠΡΟΤΑΣΗ και τον ορισμό του κλειστού]

Αντιπαράδειγμα: $\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B}\left(\bar{x}, 1 - \frac{1}{k+1}\right)}_{\text{κλειστά}} = \underbrace{B(\bar{x}, 1)}_{\text{ανοικτό}}$

ανοικτό (δηλ. όχι κλειστό αφού $\neq \emptyset, \mathbb{R}^n$) και (ανεξάρτητα από το προηγούμενο) (ΑΣΚΗΣΗ)



όχι κλειστό